INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Výukový materiál zpracován v rámci projektu
EU peníze středním školám

Goniometrie

pro nižší gymnázium

Mgr. Jana Sabolová

Registrační číslo projektu: CZ.1.07/1.5.00/34. 0418
Číslo klíčové aktivity: IV/2
Název klíčové aktivity: Inovace a zkvalitnění výuky směřující k rozvoji matematické gramotnosti žáků středních škol
Číslo materiálu: VY_42_INOVACE_34-64
Datum: 8. 5. 2013

Vzdělávací oblast:	Matematika a její aplikace
Tematická oblast:	Goniometrie v pravoúhlém trojúhelníku
Předmět:	Matematika
Třída:	II.
Výstižný popis způsobu využití, případně metodické pokyny:	Soubor je tvořen 31 pracovními listy, které lze svázat do pracovního sešitu. Každý žák obdrží jeden pracovní list, nebo sešit. Práce slouží buď jako výukový materiál, nebo jako prostředek pro opakování již probraného učiva. Vypracování všech úkolů jednoho pracovního listu zabere minimálně 25 minut. Souboru předchází jedna prezentace, jejíž obsah je možné zařadit buď jako motivační hodinu, nebo jako závěrečnou hodinu.
Klíčová slova:	goniometrie, sinus, kosinus, tangens, kotangens
Druh učebního materiálu:	Pracovní listy (sešit) + 2 prezentace

Autorem materiálu a všech jeho částí, není-li uvedeno jinak, je Mgr. Jana Sabolová.

OBSAH

1 FUNKCE SINUS A KOSINUS ---------- 5

1.1 FUNKCE SINUS (VY_42_INOVACE_34) ---------- 5
1.2 FUNKCE COSINUS (VY_42_INOVACE_35) ---------- 6
1.3 TABULKOVÉ HODNOTY FUNKCE SINUS A KOSINUS (VY_42_INOVACE_36) ---------- 7
1.4 SINUS A KOSINUS V PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU (VY_42_INOVACE_37) ---------- 8
1.5 JEDNODUCHÉ GONIOMETRICKÉ VÝRAZY (VY_42_INOVACE_38) ---------- 9
1.6 VÝPOČET ÚHLŮ POMOCÍ KALKULÁTORU (VY_42_INOVACE_39) ---------- 10
1.7 UŽITÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ V PRAXI I. (VY_42_INOVACE_40) ---------- 11

2 FUNKCE TANGENS A KOTANGENS ---------- 12

2.1 FUNKCE TANGENS, GRAF (VY_42_INOVACE_41) ---------- 12
2.2 FUNKCE KOTANGENS, GRAF (VY_42_INOVACE_42) ---------- 13
2.3 TABULKOVÉ HODNOTY TANGENS A KOTANGENS (VY_42_INOVACE_43) ---------- 14
2.4 TANGENS A KOTANGENS V PRAVOÚHLÉM TROJÚHELNÍKU (VY_42_INOVACE_44) ---------- 15
2.5 JEDNODUCHÉ GONIOMETRICKÉ VÝRAZY II. (VY_42_INOVACE_45) ---------- 16
2.6 ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI GONIOMETRICKÝMI FUNKCEMI (VY_42_INOVACE_46) ---------- 17
2.7 URČOVÁNÍ GONIOMETRICKÝCH HODNOT NA KALKULÁTORU II. (VY_42_INOVACE_47) ---------- 18
2.8 UŽITÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ V PRAXI II. (VY_42_INOVACE_48) ---------- 19
2.9 UŽITÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ V PRAXI III. (VY_42_INOVACE_49) ---------- 20
2.10 UŽITÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ V PRAXI IV. (VY_42_INOVACE_50) ---------- 21

3 MIX ÚLOH NA GONIOMETRICKÉ FUNKCE ---------- 22

3.1 JEDNODUCHÉ GONIOMETRICKÉ ROVNICE (VY_42_INOVACE_51) ---------- 22
3.2 SLOŽITĚJŠÍ GONIOMETRICKÉ ROVNICE (VY_42_INOVACE_52) ---------- 23
3.3 SLOVNÍ ÚLOHY JEDNODUCHÉ I. (VY_42_INOVACE_53) ---------- 24
3.4 SLOVNÍ ÚLOHY JEDNODUCHÉ II. (VY_42_INOVACE_54) ---------- 25
3.5 SLOVNÍ ÚLOHY SLOŽITĚJŠÍ I. (VY_42_INOVACE_55) ---------- 26
3.6 URČOVÁNÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ Z TABULEK (VY_42_INOVACE_56) ---------- 27

4 GONIOMETRICKÉ FUNKCE A STEREOMETRIE ---------- 28

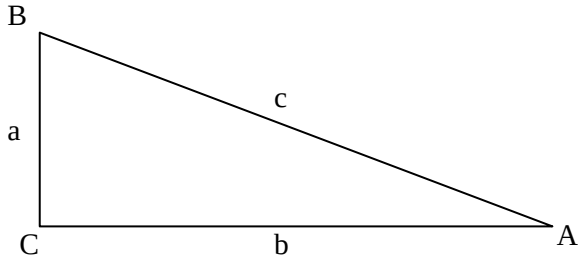
4.1 UŽITÍ FUNKCE SINUS A COSINUS VE STEREOMETRII I. (VY_42_INOVACE_57) ---------- 28
4.2 UŽITÍ FUNKCE SINUS A COSINUS VE STEREOMETRII II. (VY_42_INOVACE_58) ---------- 29
4.3 UŽITÍ FUNKCE TANGENS VE STEREOMETRII (VY_42_INOVACE_59) ---------- 30
4.4 UŽITÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ VE STEREOMETRII (VY_42_INOVACE_60) ---------- 31
4.5 UŽITÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ V PRAXI V. (VY_42_INOVACE_61) ---------- 32
4.6 UŽITÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ V PRAXI VI. (VY_42_INOVACE_62) ---------- 33
4.7 UŽITÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ V PRAXI VII. (VY_42_INOVACE_63) ---------- 34
4.8 UŽITÍ GONIOMETRICKÝCH FUNKCÍ V PRAXI VIII. (VY_42_INOVACE_64) ---------- 35

POUŽITÉ ZDROJE ---------- 36

1 Funkce sinus a kosinus

1.1 Funkce sinus (VY_42_INOVACE_34)

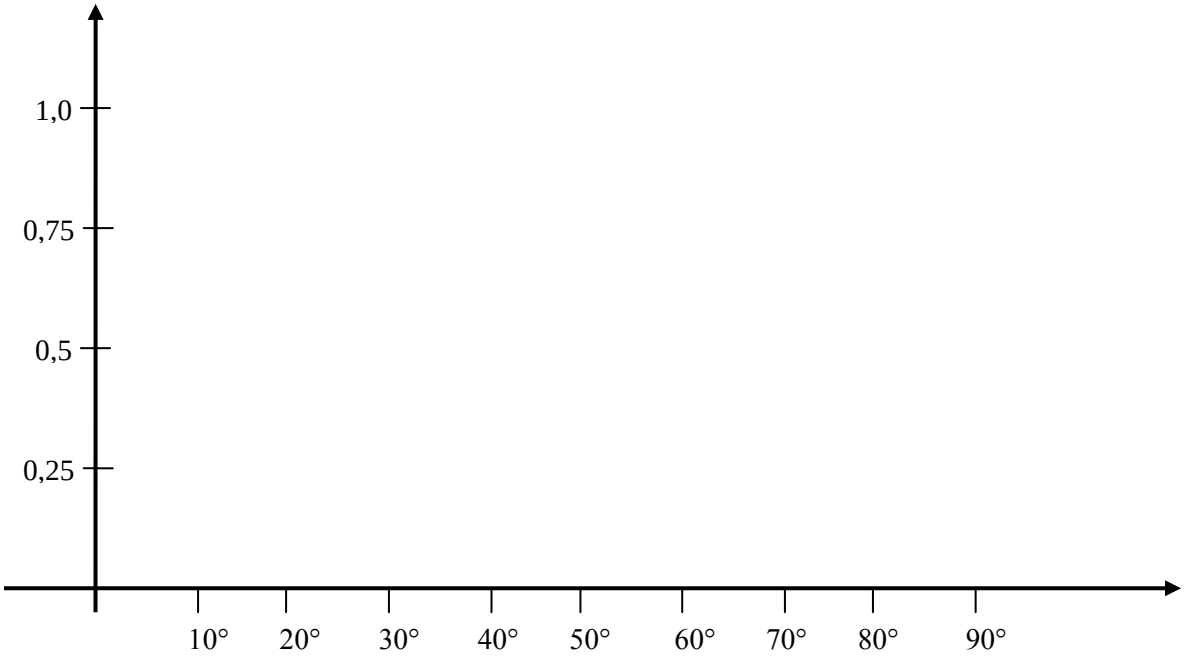
sinus úhlu = _____



sin α = **sin β =**

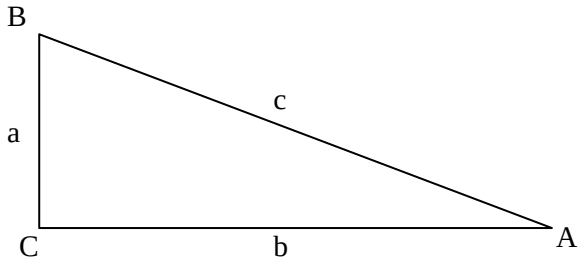
Graf funkce sinus

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
sin α	0,00	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98	1,00



1.2 Funkce cosinus (VY_42_INOVACE_35)

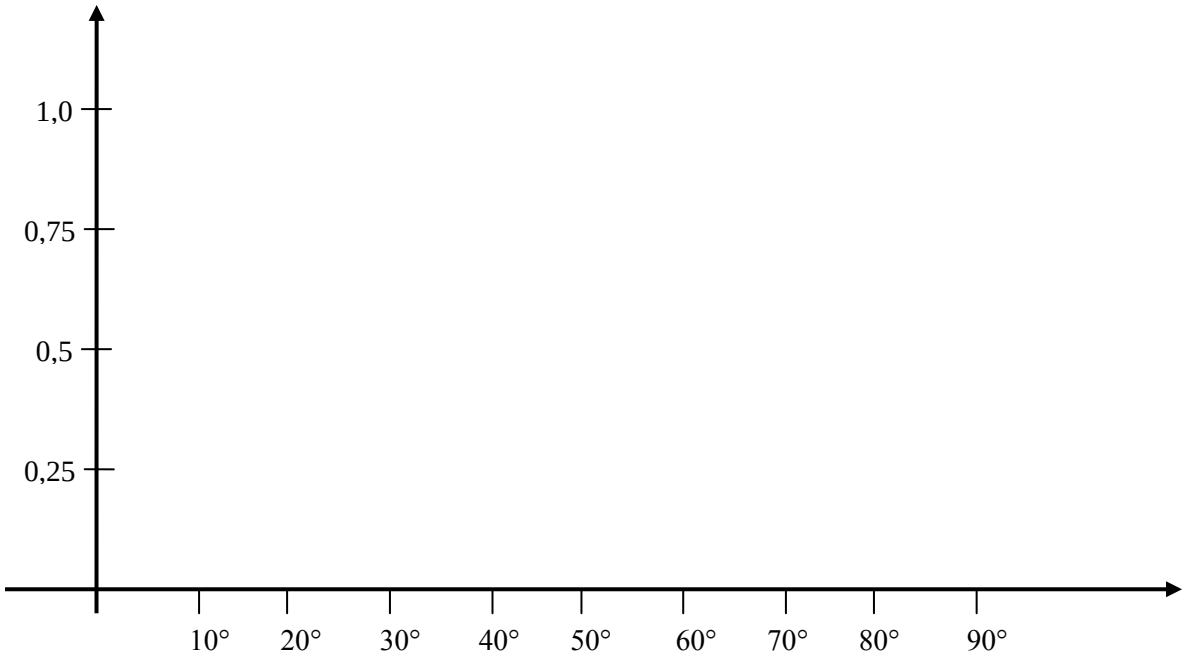
cosinus úhlu = _____



cos α = **cos β =**

Graf funkce cosinus

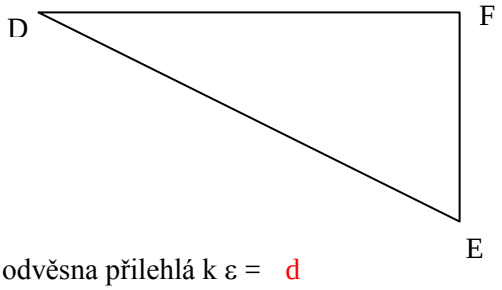
α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
cos α	1,00	0,98	0,94	0,87	0,77	0,64	0,50	0,34	0,17	0,00

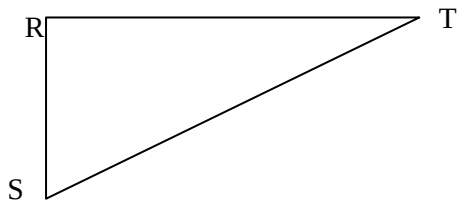


1.3 Tabulkové hodnoty funkce sinus a kosinus (VY_42_INOVACE_36)

	0°	30°	45°	60°	90°
sin α					
cos α					

1. Doplňte do obrázků označení stran a úhlů a určete přilehlé a protilehlé odvěsny. (ε = epsilon, τ = tau, σ = sigma)





odvěsna přilehlá k ε = d

odvěsna protilehlá k δ = d

odvěsna protilehlá k ε = e

odvěsna přilehlá k δ = e

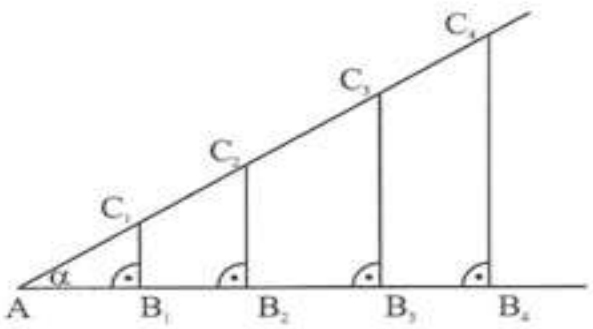
odvěsna protilehlá k τ = t

odvěsna přilehlá k τ = s

odvěsna přilehlá k σ = t

odvěsna protilehlá k σ = s

2. Na obrázku jsou podobné trojúhelníky (podle věty **uu). Změřte délky úseček v milimetrech, sestavte zadané poměry a zlomky vyjádřete desetinným číslem zaokrouhleným na desetiny.**



$$\frac{|B_1C_1|}{|AC_1|} =$$

$$\frac{|B_3C_3|}{|AC_3|} =$$

$$\frac{|B_2A|}{|AC_2|} =$$

$$\frac{|B_4A|}{|AC_4|} =$$

a) Co platí pro poměry stran v horní části sloupce?……jsou podobné (ne-li shodné)

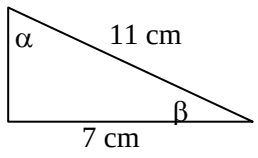
b) Pojmenujte strany B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 vzhledem k úhlu α ……protilehlá odvěsna

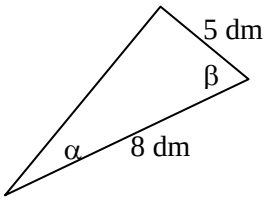
c) Pojmenujte strany AB_1, AB_2, AB_3 vzhledem k úhlu α ……přilehlá odvěsna

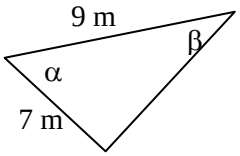
d) Pojmenujte strany AC_1, AC_2, AC_3 v pravoúhlých trojúhelnících. ……přepona

1.4 Sinus a kosinus v pravoúhlém trojúhelníku (VY_42_INOVACE_37)

1. V pravoúhlém trojúhelníku vypočítejte s využitím goniometrických funkcí úhly α a β.



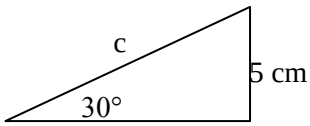


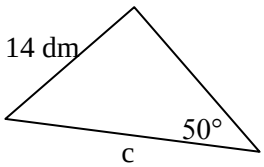


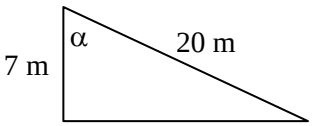
α = 39° 31´ **α = 39° 14´** **α = 38° 57´**

β = 50° 29´ **β = 50° 46´** **β = 51° 3´**

2. Určete neznámé ze zadaných údajů:

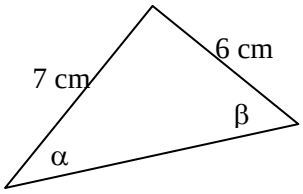


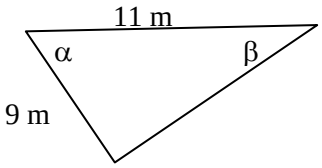




c = 10 cm **c = 18,28 dm** **α = 69° 31´**

3. Určete zbývající neznámé údaje pravoúhlého trojúhelníka.





α = 40° 36´ **α = 35° 6´**

β = 49° 54´ **β = 54° 54´**

1.5 Jednoduché goniometrické výrazy (VY_42_INOVACE_38)

1. Určete zadané hodnoty:

a) sin 30° = **1/2** b) cos 0° = **1** c) sin 45° = **√2/2** d) cos 30° = **√3/2**

cos 45°= **√2/2** sin 60° = **√3/2** cos 90° = **1** sin 0° = **0**

2. Zopakujte si sčítání a odčítání úhlů:

a) 24° 17′ + 15° 26′ = **39° 43′**

b) 76° 18′ – 11° 9′ = **65° 9′**

c) 60° – 36° 18′ = **23° 42′**

d) 34° 55′ + 12° 52′ = **47° 47′**

3. Určete bez použití kalkulátoru:

a) sin 30° + cos 60° = **1**

b) sin 90° – cos 90° = **0**

c) cos 45° + sin 45° = **√2**

d) cos 30° + sin 0° = **√3/2**

4. Vypočtěte:

a) 2· sin 30° – 4 cos 60° = **– 1**

b) 2(cos 45° + sin 60°) = **√2 + √3**

c) sin 45°· cos 0° + 2cos 60°· sin 90° = **√2/2 + √2**

5. Délky stran v pravoúhlém trojúhelníku jsou v poměru 5:4:3. Vypočítejte velikost vnitřních úhlů v trojúhelníku. (90°; 53° 8′; 36° 52′)

1.6 Výpočet úhlů pomocí kalkulátoru (VY_42_INOVACE_39)

1. Určete hodnoty na kalkulátoru s přesností na čtyři desetinná místa:

a) sin 45° = **0,707 1**

b) sin 52° 24′ = **0,792 2**

c) sin 70,5 ° = **0,942 6**

d) sin 56′ = **0,0162 9**

e) cos 18° 25′ = **0,948 8**

f) cos 87° = **0,0523 3**

g) cos 42° 19′ = **0,739 4**

h) cos 56° 8′ = **0,557 2**

2. Rozhodněte s využitím kalkulátoru, zda platí uvedené relace:

a) cos 28° < cos 45° **NE**

b) cos 35° > cos 55° **ANO**

c) sin 52° > sin 78° **NE**

d) cos 68° < sin 19° **NE**

e) sin 47° < cos 43° **NE**

f) cos 47° < sin 62° **ANO**

3. Pomocí kalkulátoru vyjádřete velikosti úhlů s přesností na minuty (κ = ksí, ε = epsilon, φ = fí)**:**

a) sin κ = 0,3 → κ = 17° 27′

b) cos β = 0,567 9 → β = 55° 24′

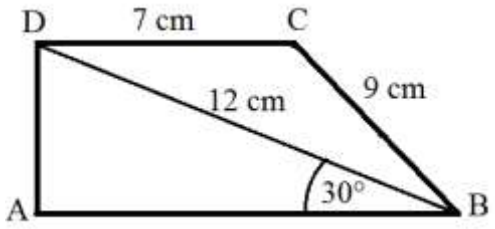
c) sin ε = 0,753 → ε = 48° 51′

d) cos φ = 0,974 5 → φ = 12° 58′

e) sin δ = 1,24 → δ = neexistuje

f) cos γ = 0,04 → γ = 84° 42′

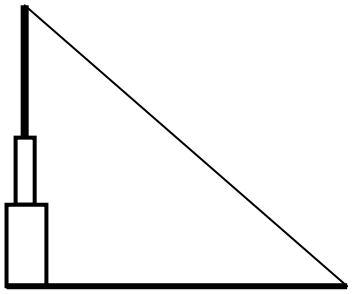
4. Určete obvod a obsah pravoúhlého lichoběžníku z údajů uvedených na obrázku.



o = 32,39 cm S = 52,18 cm^2

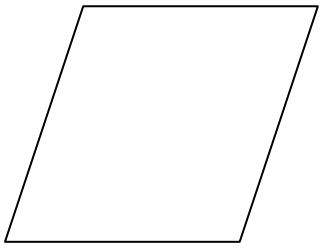
1.7 Užití goniometrických funkcí v praxi I. (VY_42_INOVACE_40)

1. Vypočítejte délku kotevního lana stožáru svírajícího s vodorovnou rovinou úhel 50° a upevněného od paty stožáru ve vzdálenosti 25 metrů. Jaká je výška stožáru? (16,07 m)



2. Do jaké výšky sahá jedenácti metrový žebřík opřený o zeď pod úhlem 25°? Udělejte si náčrtek. (4,65 m)

3. Vypočítejte obvod kosočtverce ABCD, kde |BD| = 12 cm, |∠DAC| = 30°. (o = 92,73 cm)

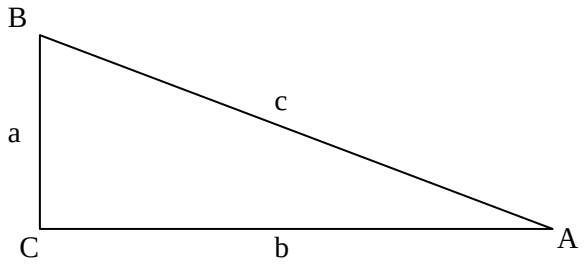


4. Vypočtěte obvod obdélníku ABCD, jestliže |AC| = 8,5 dm a |∠BCA| = 65°.
(a = 7,7 dm b = 3,6 dm o = 22,6 dm)

2 Funkce tangens a kotangens

2.1 Funkce tangens, graf (VY_42_INOVACE_41)

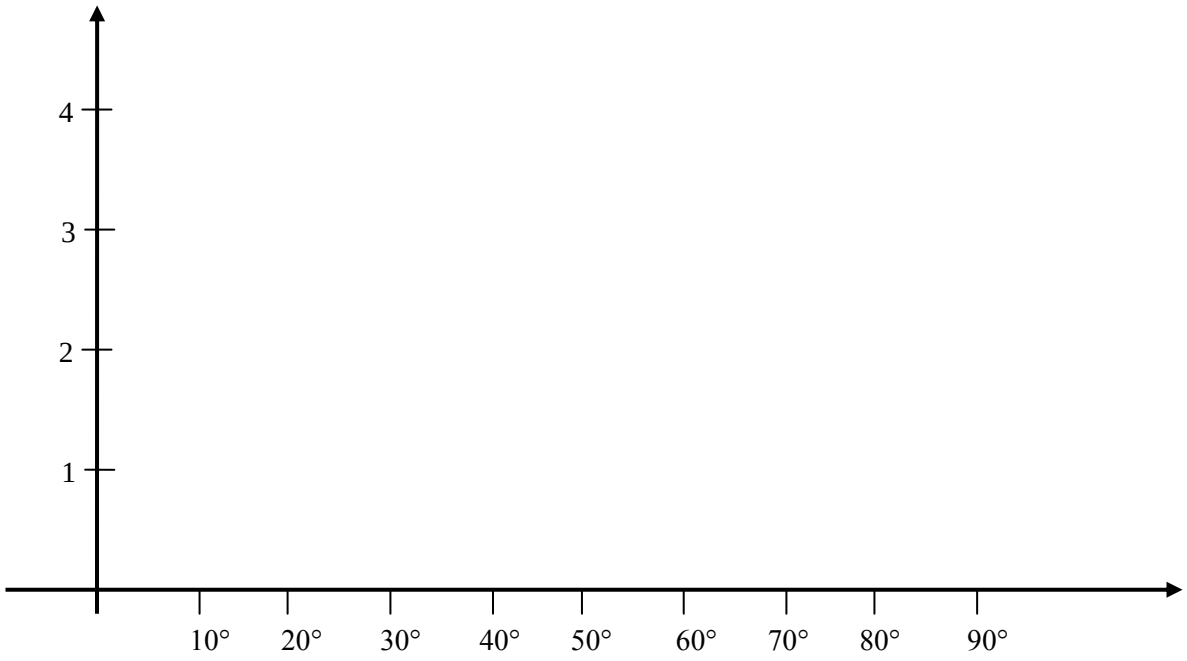
tangens úhlu = _____



tg α = **tg β =**

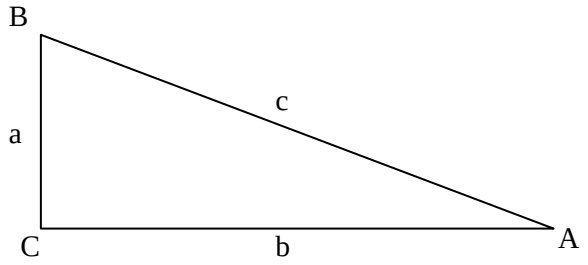
Graf funkce tangens

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
tg α	0,00	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,67	–



2.2 Funkce kotangens, graf (VY_42_INOVACE_42)

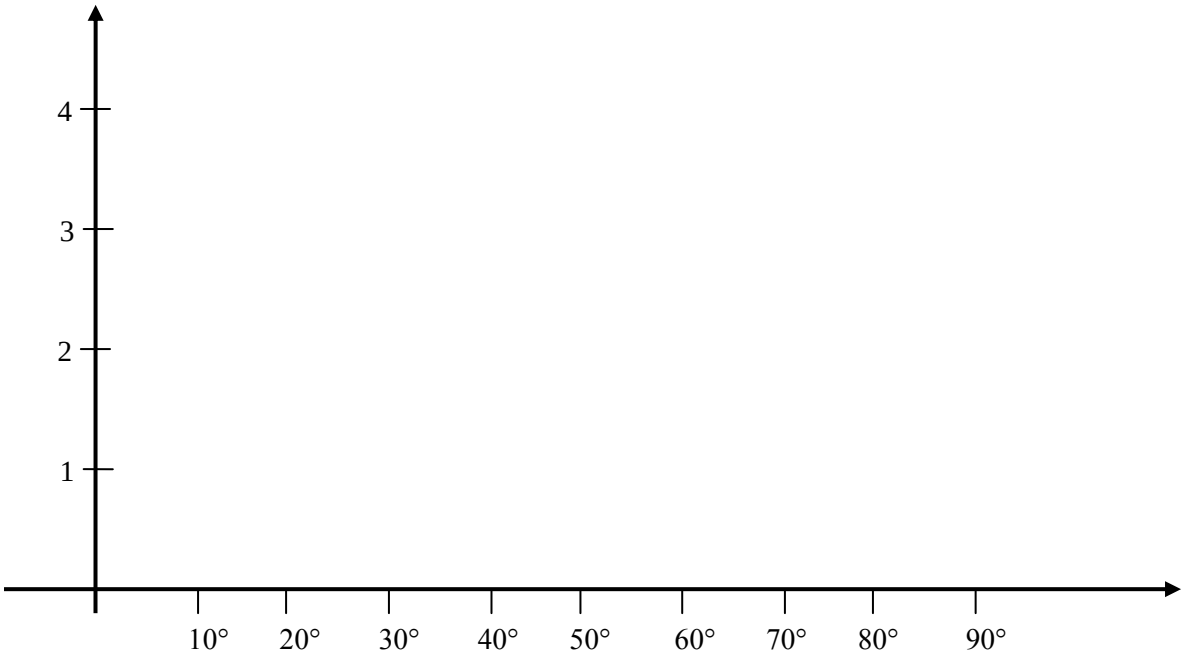
kotangens úhlu = _____



cotg α = **cotg β =**

Graf funkce kotangens

α	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
cotg α	–	5,67	2,75	1,73	1,19	0,84	0,58	0,36	0,18	0,00



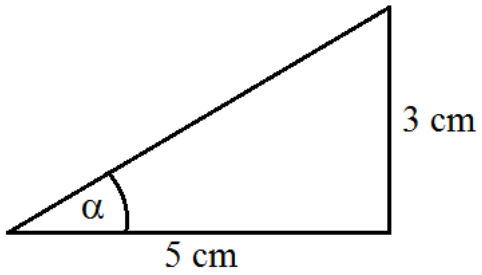
2.3 Tabulkové hodnoty tangens a kotangens (VY_42_INOVACE_43)

	0°	30°	45°	60°	90°
tg α					
cotg α					

1. Narýsujte pravoúhlé trojúhelníky dle podmínek (viz příklad) a vypočtěte úhel α.

a) tg α = 3/5

b) cotg α = 3/4

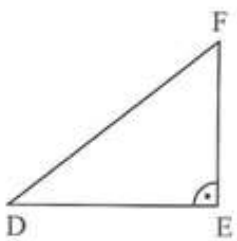


α =

c) sin α = 0,8

d) tg α = 1,2

2. Do trojúhelníku doplňte pojmenování stran a úhlů. Zapište poměr stran pro uvedené goniometrické funkce. (φ = fí)



sin δ = d/e

cotg δ = f/d

tg δ = d/f

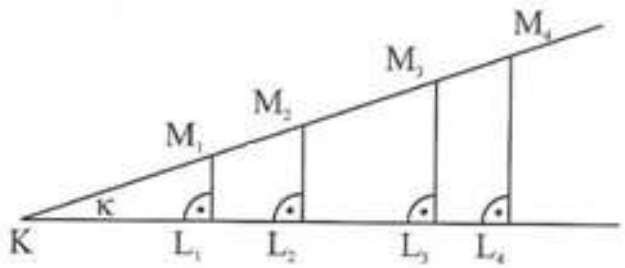
cos φ = d/e

tg φ = f/d

cotg φ= d/f

2.4 Tangens a kotangens v pravoúhlém trojúhelníku (VY_42_INOVACE_44)

1. Na obrázku jsou podobné trojúhelníky (podle věty **uu). Změřte délky zadaných úseček, sestavte jejich poměry a zlomky zapište desetinným číslem zaokrouhleným na desetiny.** (κ = kappa)



$$\frac{|M_3L_3|}{|KL_3|} =$$

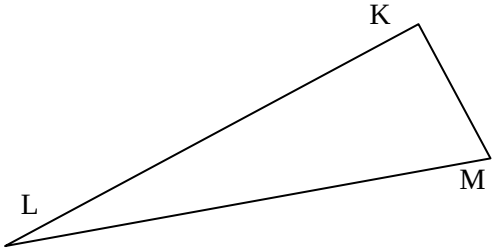
$$\frac{|M_1L_1|}{|KL_1|} =$$

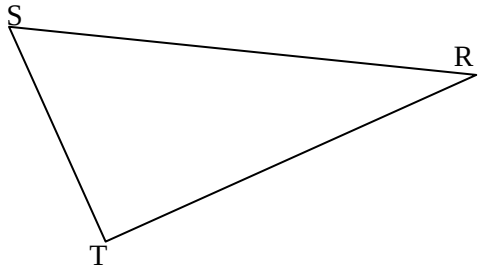
a) Co platí pro poměry stran? jsou téměř stejné

b) Pojmenujte strany M_1L_1, M_3L_3, M_4L_4 vzhledem k úhlu κ. protilehlá odvěsna

c) Pojmenujte strany KL_2, KL_3, KL_4 vzhledem k úhlu κ. přilehlá odvěsna

2. V trojúhelnících doplňte označení stran a úhlů. Ke zlomkům zapište, aspoň jednu goniometrickou funkci, která vyhovuje zadání. (λ = lambda; μ = mí; σ = sigma; ρ = ró)





$\frac{m}{k} =$ $\frac{m}{l} =$ $\frac{s}{t} =$ $\frac{s}{r} =$

$\frac{l}{k} =$ $\frac{l}{m} =$ $\frac{r}{s} =$ $\frac{r}{t} =$

3. Vypočtěte velikosti vnitřních úhlů v pravoúhlém trojúhelníku, jsou-li délky odvěsen dlouhé 6 dm a 8 dm. (36° 52´; 53° 8´)

2.5 Jednoduché goniometrické výrazy II. (VY_42_INOVACE_45)

1. Vypočítejte:

a) tg 45° + sin 30°. cotg 90° – 3.cotg 60° = **1 + √3**

b) cotg 30° – 2. tg 60° + 3. tg 0° = **–√3**

2. Vypočtěte:

a) cotg 60°·cos 45° – sin 60° · tg 60° = **(√6 – 9)/6**

b) cotg 30°·tg 45° + 4· cos 90° = **√3/3**

c) $(\sin 30°)^2 + (\cos 30°)^2$ = **1**

d) 4·cos 60° – 6·tg 60° + 3·cotg 60° = **2 – 5√3**

3. Vypočtěte bez použití kalkulátoru:

a) tg 60°·cos 45° + sin 60° · cotg 60° = **(√6 + 3)/2**

b) tg 30°·cotg 45° + 4· sin 90° = **4 + √3/3**

c) $(\sin 45°)^2 + (\cos 45°)^2$ = **1**

d) 4·sin 60° + 6 cotg 60° – 3 tg 60° = **√3**

e) $2\cdot \mathrm{tg}^2\, 30° - 4 \cos 60°$ = **4/3**

f) $(\cos 45° + \mathrm{cotg}\, 60°)^2$ = **4 + 2√3**

g) sin 45°· tg 0° + 3cotg 60°· sin 90° = **√3**

2.6 Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi (VY_42_INOVACE_46)

tg α = sin α / cos α

tg α = 1/ cotg α

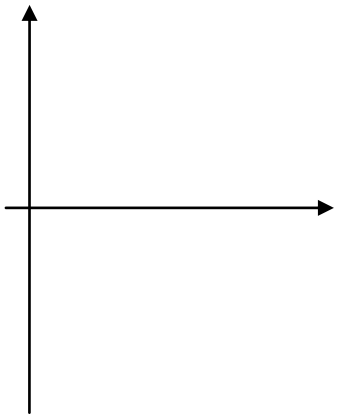
cotg α = cos α / sin α

cotg α = 1/ tg α

1 = tg α ·cotg α

1 = $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

1. Určete pomocí grafu tangens a kotangens, zda platí:



a) tg 23° < tg 18° NE

b) tg 52° < tg 64° ANO

c) tg 45° > tg 55° NE

d) cotg 35° < cotg 60° NE

e) cotg 48° > cotg 23° NE

f) tg 65° > cotg 65° ANO

2. Rozhodněte s využitím kalkulátoru, zda platí uvedené relace:

a) cos 28° < tg 45° ANO

b) cotg 35° > tg 35° ANO

c) tg 52° < sin 78° NE

d) cotg 68° = tg 22° ANO

e) tg 47° > cotg 47° NE

f) cotg 47° > sin 62° ANO

3. Za předpokladu, že o velikosti úhlu β platí, že β > 45°, rozhodněte, který z následujících vztahů je pravdivý:

tg β = 0 tg β < 1 tg β > 1 tg β = 1

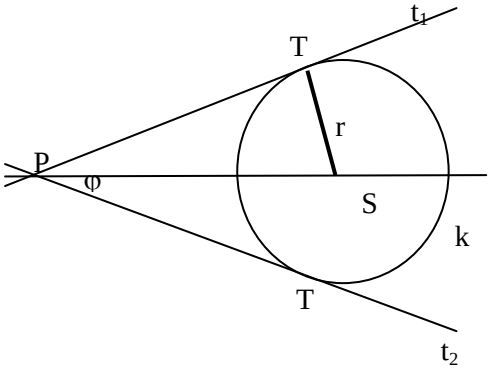
2.7 Určování goniometrických hodnot na kalkulátoru II. (VY_42_INOVACE_47)

1. Určete pomocí kalkulátoru:

a) tg 44°20´ = **0,977** b) tg 78°42´ = **5,005** c) tg 10°56´ = **0,193**

d) cotg 53°15´ = **0,747** e) cotg 87° 23´ = **0,046** f) cotg 9° 45´ = **5,820**.

2. Určete poloměr kružnice (viz obrázek), jestliže φ = 40°a |TP| = 15 cm. (φ = fí)

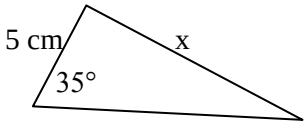


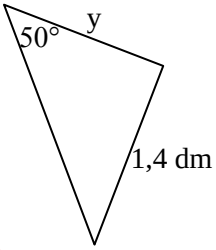
r = 5,46 cm

3. Obdélník KLMN má obvod 78 cm. Délky jeho stran jsou v poměru 8:5. Vypočítejte velikost úhlu ∠ MKL.

∠ MKL = 32°

4. Určete hodnoty vyznačených odvěsen.

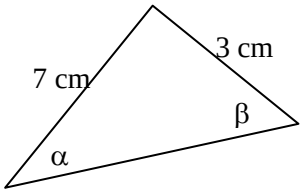


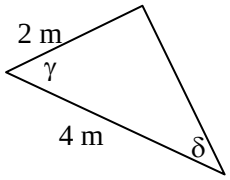


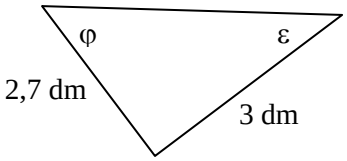
x = 3,5 cm **y = 1,17 dm**

2.8 Užití goniometrických funkcí v praxi II. (VY_42_INOVACE_48)

1. Vypočítejte užitím vhodných goniometrických funkcí velikosti úhlů α a β.



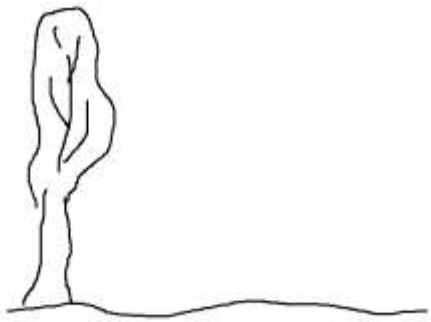




α = 23° 12´
β = 66° 48´

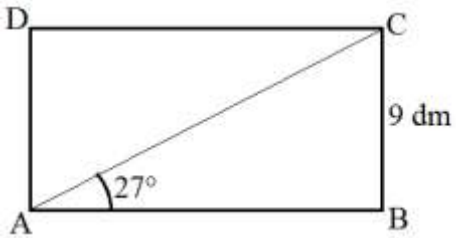
δ = 30°
γ = 60°

ε = 41° 59´
φ = 48° 1´



2. Určete výšku stromu, který sledujeme ze vzdálenosti 20 metrů pod výškovým úhlem 55°. (28,56 m)

3. Vypočítejte obvod a obsah obdélníka s údaji na obrázku.
(o = 53,33 dm; S = 158,97 dm^2)



4. Železniční trať má stoupání 22,5 ‰. Vyjádřete stoupání ve stupních. Nakreslete si obrázek.
(1° 17´)

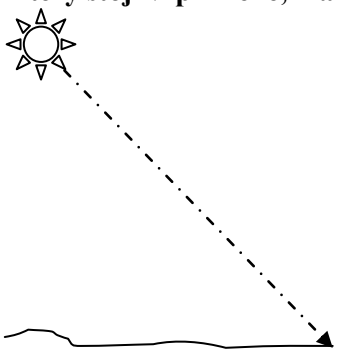
2.9 Užití goniometrických funkcí v praxi III. (VY_42_INOVACE_49)

1. Silnice stoupá pod úhlem 12°. Vyjádřete stoupání v procentech. (21,26 %)

2. Rovnoramenný trojúhelník se základnou 20 dm má výšku 1,2 m. Určete velikosti jeho vnitřních úhlů. Nakreslete si obrázek. (50° 12´; 79° 36´)

3. Jak vysoká je věž, jestliže ze vzdálenosti 160 metrů vidí pozorovatel její vrchol ve výškovém úhlu 59°? (266 m)

4. Pod jakým úhlem dopadají sluneční paprsky na povrch Země, jestliže člověk (vysoký 1,85 m), který stojí vzpřímeně, má stín dlouhý 10 metrů? (10° 29´)

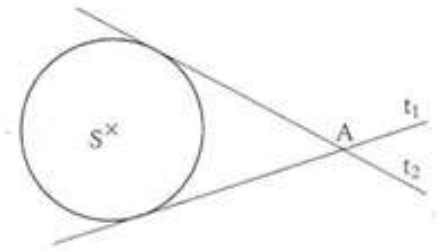


2.10 Užití goniometrických funkcí v praxi IV. (VY_42_INOVACE_50)

1. Ramena kružítka jsou dlouhá 12 cm. Vypočítejte obvod kružnice, kterou kružítkem opíšete, svírají-li ramena úhel 20°. (o = 13,09 cm)

2. Obsah pravoúhlého trojúhelníka je 62,3 cm^2 a jeho jedna odvěsna má délku 8 cm. Vypočítejte velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku. Udělejte si náčrt. (62° 49´; 27° 11´)

3. Vypočítejte velikost úhlu, který svírají tečny t_1, t_2 z bodu A ke kružnici k(S; 25 mm), jestliže |AS| = 87 mm. (33° 24´)



3 Mix úloh na goniometrické funkce

3.1 Jednoduché goniometrické rovnice (VY_42_INOVACE_51)

1. Řešte rovnice

a) $\sin x = 0{,}5$

$x = 30°$

b) $\cos y = 1$

$y = 90°$

c) $\mathrm{tg}\, z = 0$

$z = 0°$

d) $\mathrm{cotg}\, x = \sqrt{3}$

$x = 30°$

e) $2 \sin y = \sqrt{2}$

$y = 45°$

f) $3\cos z = 0$

$z = 90°$

g) $3\mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$

$x = 30°$

h) $\mathrm{cotg}(y) - 1 = 0$

$y = 45°$

2. Řešte rovnice

a) $\sin (2z) = 1$

$z = 45°$

b) $\cos (3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = 15°$

c) $\mathrm{tg}(\frac{y}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$y = 60°$

d) $\mathrm{cotg}(\frac{3}{2}z) = 0$

$z = 60°$

e) $\sin (x + 20°) = 0$

$x = -20°$

f) $\cos (y - 35°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y = 95°$

g) $\mathrm{tg}\, (50° + z) = 1$

$z = -5°$

3. Vymyslete dvě goniometrické rovnice pro své spolužáky

3.2 Složitější goniometrické rovnice (VY_42_INOVACE_52)

1. Vyřešte goniometrické rovnice:

a) $\cos(3x) = 0$

x = 30°

b) $\mathrm{cotg}(\frac{y}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

y = 90°

c) $\sin(z + 35°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

z = 25°

e) $\mathrm{tg}(50° + z) = 1$

z = –5°

f) $2\sin(65° + 2x) = \sqrt{3}$

x = –2,5°

g) $2\cos(\frac{3}{2}z - 15°) = 1$

z = 50°

2. Řešte rovnice

a) $3\,\mathrm{cotg}(x + 25°) = \sqrt{3}$

x = 35°

b) $2\sin(65° - 2y) = 1$

y = 17,5°

c) $2\cos(\frac{3}{2}z + 15°) = \sqrt{2}$

z = 20°

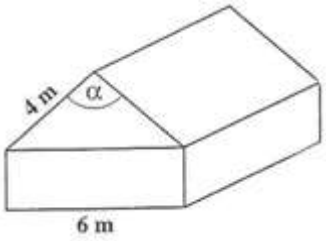
3. Vymyslete goniometrickou rovnici, tak aby neznámá vyšla 50°

3.3 Slovní úlohy jednoduché I. (VY_42_INOVACE_53)

1. Na vzdálenosti sto metrů vystoupá silnice o jedenáct metrů. Jak velký je úhel stoupání? Kolik je to procent? (6° 17´; 11 %)

2. Jak vysoký je komín, uvidíme-li jeho vrchol ze vzdálenosti šedesát metrů od paty pod výškovým úhlem 42°? (54,02 m)

3. Štít domu má tvar rovnoramenného trojúhelníku s ramenem délky 4 m a velikosti základny 6 m. Jak velký úhel svírá střecha? (97° 10´)



4. Dvojitý žebřík (štafle) má každé rameno 4 m dlouhé. Určete velkost úhlu rozevřeného žebříku, jestliže jeho spodní konce jsou od sebe vzdáleny 2,2 m. Do jaké výše žebřík sahá?
(31° 55´; 3,85 m)

3.4 Slovní úlohy jednoduché II. (VY_42_INOVACE_54)

1. Čtyři metry dlouhý žebřík je opřen tak, že se jeho horní konec opírá o zeď ve výši 3,5 metrů. Vypočtěte velikost úhlu, který svírá žebřík s rovinou země. (61° 3´)

2. Jak je přibližně od nás daleko člověk, jestliže ho vidíme v zorném úhlu 12°? (Výšku člověka uvažujeme 180 cm) (8,5 m)

3. Lanová dráha na Petřín v Praze má délku asi 400 metrů. Horní stanice leží o 106 metrů váš než dolní. Určete úhel stoupání. (15° 22´)

4. Pod jakým úhlem stoupá schodiště, jestliže každý schod je 30 cm široký a 12 cm vysoký? (21° 48´)

3.5 Slovní úlohy složitější I. (VY_42_INOVACE_55)

1. Záchranářský vrtulník je nad místem přistání ve výšce 180 m. Místo záchranné akce je odsud vidět pod hloubkovým úhlem 52°40´. Jak daleko přistane vrtulník od místa záchranářské akce? (137,29 m)

2. Mezi dvěma domy napříč ulicí je nataženo lano o délce 22 metrů a uprostřed je zavěšen transparent. Lano je prověšeno o 50 cm. Vypočítejte úhel, který svírají obě poloviny lana. Načrtněte si obrázek. (174° 47´)

3. Z okna budovy ve výšce 7,5 m je vidět vrchol továrního komínu pod výškovým úhlem 36°30´. Pata komínu je ze stejného místa vidět pod hloubkovým úhlem 5°30´. Jak vysoký je komín? (57,64 m)

4. Vlak stoupá po železnici průměrnou rychlostí 20 km/h po dobu 15 minut. Jaké převýšení překoná, je-li stoupání trati 4,5 %? (225 m)

3.6 Určování goniometrických funkcí z tabulek (VY_42_INOVACE_56)

1. Doplňte údaje pomocí matematických tabulek

α	23°	40° 20´	56° 50´	75,5°	89° 10´
sin α	0,390 7	0,647 2	0,837 1	0,968 1	0,999 9

α	10	29° 10´	54° 50´	69° 14´	88° 51´
sin α	0,173 6	0,487 4	0,817 5	0,935	0,999 8

α	23°	34° 9´	56° 50´	64° 27´	89° 10´
tg α	0,424 4	0,687 3	1,530 1	2,092	68,75

2. Doplňte údaje pomocí matematických tabulek

β	80°	10° 20´	35° 10´	63° 40´	3° 48´
cos β	0,173 6	0,983 8	0,817 5	0,443 6	0,997 8

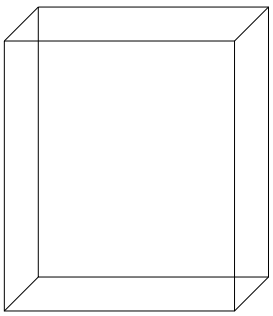
β	4° 21´	62° 50´	24° 41´	10° 20´	26° 35´
cotg β	13,17	0,513 2	2,175	5,484 5	1,998

3. Jak velký je úhel φ, jestliže pro něj platí cos φ = tg 29° 30´? (φ = 55° 33´)

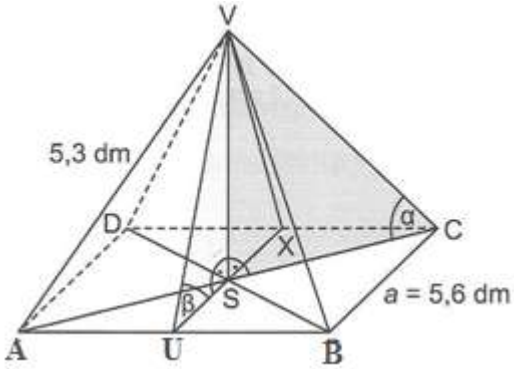
4 Goniometrické funkce a stereometrie

4.1 Užití funkce sinus a cosinus ve stereometrii I. (VY_42_INOVACE_57)

1. Vypočítejte objem kvádru s podstavnými hranami a = 20 cm a b = 15 cm, svírá-li stěnová úhlopříčka s přední podstavnou hranou úhel α = 68°.
(V = 14 850,52 cm^3)



2. Prohlédněte si obrázek pravidelného čtyřbokého jehlanu ABCD. Hrana jeho podstavy má délku a = 5,6 dm. Průsečík úhlopříček podstavy je označen S. Úsečka UX je střední příčka této podstavy.
Platí: |AV| = |CV| = 5,3 dm. Vypočítejte:
a) tělesovou výšku |VS| , (3,52 dm)



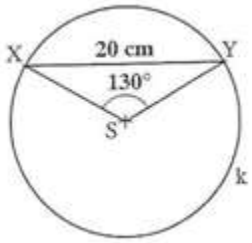
b) velikosti úhlů α = |∠SCV| a β = |∠VUS|, (α = 41° 39´; β = 51° 30´)

c) objem a povrch jehlanu. (V = 36,80 dm^3; S = 62,72 dm^2)

4.2 Užití funkce sinus a cosinus ve stereometrii II. (VY_42_INOVACE_58)

1. Obsah pláště rotačního kužele je 381,51 cm2 a délka strany je 13,5 cm. Vypočítejte poloměr, výšku objem jehlanu a velikost odchylky mezi stranou pláště a podstavou.
(r = 9 cm, v = 10,1 cm, V = 856,28 cm3, odchylka je 48°)

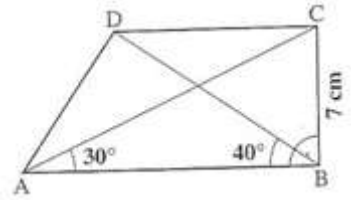
2. Vypočítejte obsah podstavy (viz obrázek) a objem válce, je-li jeho tělesová výška třikrát větší než průměr podstavy. (S_p = 1 529,88 cm^2; V = 202 587,21 cm^3)



3. Pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV má tělesovou výšku v = 8,5 dm. Hrana AV svírá s podstavou odchylku φ = 49° 20´. Vypočtěte velikost pobočné hrany AV jehlanu. (11,6 dm)

4.3 Užití funkce tangens ve stereometrii (VY_42_INOVACE_59)

1. Vypočítejte obsah podstavy (z údajů na obrázku) kolmého hranolu. Jaký je objem hranolu, je-li tělesová výška shodná s výškou podstavy. (S_p = 71,63 cm^2; V = 501,38 cm^3)

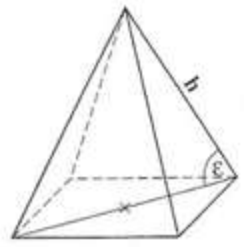


2. V kvádru ABCDEFGH se čtvercovou podstavou je hrana |AE| = 11 cm , tělesová úhlopčíčka AG svírá s rovinou podstavy úhel 60° 30´. Vypočtěte velikost podstavné úhlopříčky. Určete povrch kvádru. Proveďte náčrtek. (u = 6,22 cm; S = 232,21 cm^2)

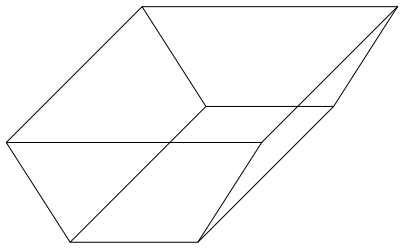
3. Pravidelný čtyřboký jehlan ABCDV má tělesovou výšku v = 7,6 cm. Hrana AV svírá s podstavou odchylku ε = 48° 30´. Vypočtěte objem jehlanu. (V = 687,21 cm^3)

4.4 Užití goniometrických funkcí ve stereometrii (VY_42_INOVACE_60)

1. V pravidelném čtyřbokém jehlanu svírá boční hrana h = 7 cm s úhlopříčkou podstavy úhel ε = 55°. Vypočítejte obsah pláště jehlanu. (S_{pl} = 72,64 cm^2)



2. Vypočítejte spotřebu dřeva na výrobu žlabu dlouhého 4 metry s průřezem ve tvaru rovnoramenného lichoběžníku se základnami 0,5 m a 90 cm. Ramena svírají s větší základnou úhel 50°. (S = 4,83 m^2)



3. Z plechu tvaru půlkruhu s poloměrem 6 cm je sletována nálevka tvaru rotačního kužele. Vypočítejte průměr podstavy kužele a výšku nálevky. (d = 6 cm; v = 5,2 cm)

4.5 Užití goniometrických funkcí v praxi V. (VY_42_INOVACE_61)

1. Podle plánu měl být most 47 metrů dlouhý a postavený kolmo na tok řeky. Z terénních důvodů musel být odkloněn o 20° od původního směru. Jaká bude skutečná délka mostu? (Udělejte si náčrtek.) (50,02 m)

2. Vypočítejte, kolik m^3 půdního prostoru vznikne nahrazením rovné střechy s rozměry 12 m a 7,5 m, vybuduje-li se sedlová střecha svírající s vodorovnou rovinou úhel 50°? Udělejte si náčrtek.

(V = 321,77 m^3 nebo V = 175,19 m^3)

3. Do které výšky vystoupá letadlo za 5 minut, stoupá-li přímočaře pod úhlem 6° a letí průměrnou rychlostí 4 $km \cdot min^{-1}$. (2,09 km)

4.6 Užití goniometrických funkcí v praxi VI. (VY_42_INOVACE_62)

1. Sjezdová lyžařská dráha má délku 1456 metrů. Její převýšení je 350 metrů. Jaký je sklon sjezdovky? (13° 55´)

2. Z okna ve výši 24 metrů vidí Lojza auto pod hloubkovým úhlem 10°30´. Jak daleko je auto od domu? (129,49 m)

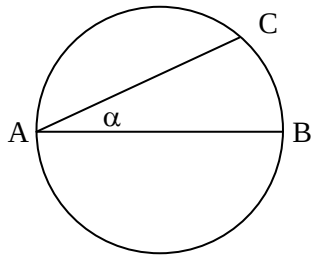
3. Střelec střílel na terč vzdálený 10 m. Jednotlivé soustředné kružnice terče mají poloměr odstupňovány po jednom centimetru od 10 bodů po 1 bod. Při výstřelu vychýlil hlaveň o 20´. Kolik bodů měl jeho zásah? (5 bodů)

4. Střecha rotundy má tvar rotačního kužele, jehož strana délky 5 metrů svírá s vodorovnou rovinou úhel 25°. Kolik krytiny je třeba na novou střechu (zanedbáme-li odpad)? (71 m^2)

4.7 Užití goniometrických funkcí v praxi VII. (VY_42_INOVACE_63)

1. Jakou hmotnost bude mít plný hliníkový kužel s úhlem při hlavním vrcholu o velikosti 60° s výškou 12,5 cm? Hustota hliníku je ρ = 2 700 kg·m^3. (m = 1,84 kg)

2. Vypočítejte obsah dřevěné desky, jestliže tětiva AC o velikosti 7,5 cm svírá s průměrem AB kružnice *k* úhel α = 34°. (S = 64,28 cm^2)



3. Z věže majáku, která je 100 m nad hladinou moře, je vidět loď v hloubkovém úhlu 5°. Jaká je vzdálenost lodi od břehu? (1 143,01 m)

4.8 Užití goniometrických funkcí v praxi VIII. (VY_42_INOVACE_64)

1. Pouliční lampa zavěšená ve výšce čtyř metrů nad zemí osvětluje prostor ve tvaru kužele s úhlem při hlavním vrcholu 120°. Vypočítejte, jakou plochu ozáří jedna lampa. (S = 150,80 m^2)

2. Vypočítejte objem střešního prostoru rozhledny tvaru pravidelného čtyřbokého jehlanu, jehož stěnová výška w = 12 m svírá s podstavou úhel ε = 60°. (Udělejte si náčrtek.) (V = 181,02 m^3)

3. Z ochozu rozhledny, který je ve výšce 60 m, vidíme městkou bránu v hloubkovém úhlu 12°. Vypočtěte vzdálenost rozhledny od městské brány. (282,28 m)

Použité zdroje

1. KOČÍ, Slavomír. KOČÍ, Ladislav. *Matematika pracovní sešit B, C pro 9. ročník.* 1. vydání. REPROtisk. Šumperk 1998

2. KOČÍ Slavomír, KOČÍ Ladislav, *Matematika pracovní sešit A pro 9. ročník 2. pololetí.* 1. vydání. REPROtisk. Šumperk 1998

3. kol. *Matematické fyzikální chemické tabulky*. 13. vydání. SPN. Praha 1983

4. MÜLLEROVÁ Jana, MÜLLER Pavel, BRANT Jiří, *Matematika pro ZŠ – Aplikace*, Kvarta Praha. 1994 ISBN 80-85570-38-6

5. TREIBAL Josef *Matematika pro mladé labužníky II. díl.* 1. vydání. ZŠ Nový Bydžov. 1992

6. kol. *Matematika 8 cvičebnice*, 5. vydání. SPN. Praha 1987

7. kol. *Sbírka úloh z matematiky pro 8. ročník*, 2. vydání. Prometheus. Praha 1995. ISBN 80-85849-45-3